لنفس المبدأ نحسب x_2

$$x_2 - x_1 = 0{,}037665247 < 0{,}04$$

$$x^* \cong x_2 = 0{,}635681618$$

الحل المطلوب وفقاً لـ ε.

* 10 أوجد بطريقة القاطع حلاً للمعادلة:

$x^4 - 3x^3 + x - 1 = 0$ ضمن $[0,2]$ $\varepsilon = 0{,}005$.

6

3 طريقة نيوتن - رافسون (طريقة المماسات):

- تشبه الطريقة السابقة لكنها تعتمد على المماسات بدل القاطع:
- لتكن لدينا المعادلة $y = f(x) = 0$ ولنوجد حلها في المجال $[a, b]$ حيث أن هذه الدالة معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق على المجال السابق:
- نأخذ من المجال نقطة تقابل المماس للدالة، فيقطع هذا المستقيم المماس المحور x في نقطة $(x_1, 0)$ نسميها التقريب الأول.

- لنوجد الآن دستوراً لهذه الطريقة باستخدام معادلة المماس:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$$

- عند النقطة $x = x_1$ يكون:

$$f(x_1) = y_1 = 0$$

- بالتعويض:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \implies x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- وهو دستور نيوتن - رافسون في المرحلة الأولى،

وبإعادة الخطوات السابقة نرسم المماس الثاني ونوجد النقطة $(x_2, 0)$ التي تعتبر التقريب الثاني ونعوض في معادلة المماس فنجد :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

- وبشكل عام :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ هام

وهو دستور نيوتن - رافسون.

ملاحظة : يجب إعطاء حل ابتدائي في هذه الطريقة.

تمرين: أوجد بطريقة نيوتن - رافسون الجذر التقريبي للمعادلة التالية :

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

في المجال $[1,2]$ ؛ حيث $\varepsilon = 0,001$ ، $x_0 = 2$ الحل الابتدائي

الحل: لإيجاد التقريب الأول نعوض في دستور نيوتن - رافسون السابق :

$x = 2$

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 3$ $\quad 2^3 + 2^2 - 3.2 - 3 = 0$

$f'(2) = 12 + 4 - 3 = 13$ $\quad 8 + 4 - 6 - 3 = 12 - 9 = 3$

$f'(2) = 13$ $\quad f(2) = 3$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{3}{13} = 1,76923.769$$

$f(x_1) = 0,36.4$; $f'(x_1) = 9,928994.83$

بنفس الطريقة نوجد التقريب الثاني :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,73292381$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1,732.517.6$$

$$|x_3 - x_2| = 0,00087 < 0,001 = \varepsilon \Rightarrow x^* \cong x_3 = 1,732.517.6$$

$$|x_n - x_{n+1}| < \varepsilon \Rightarrow x^* \cong x_n$$

SUBJECT:

II طريقة التقريبات المتتالية : (النقطة الثابتة) :

تعتمد هذه الطريقة على إعادة صياغة المعادلة $f(x)=0$ ، وذلك بعزل x في طرف وكتابة باقي الحدود في طرف آخر نسميه $g(x)$ ، أي أن الدالة تصبح ناتج معادلتين :

$f(x)=0$; $x=g(x)$

والحل هو نقطة تقاطع منحنى الدالتين .

نشكل بعد ذلك المعادلة التكرارية التالية :

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

نعطي حلاً ابتدائياً x_0 ونعوضه في المعادلة فنحصل على x_1

ثم نعود ونبدل x_1 في المعادلة فنحصل على x_2 ، ونستمر في هذه العملية فنحصل على كثير الحدود التقريبية .

نحصل على متتالية القيم : $x_0, x_1, \ldots, x_n$

ونحسب نهاية : $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$

أي نحقق التراجع :

$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$; $\varepsilon > 0$

$\longrightarrow x^* \cong x_{i+1}$

مبرهنة : لنفرض أن الدالة $g(x)$ تحقق الشروط التالية :

① مهما يكن $x \in [a,b]$ فالدالة $g(x)$ تكون معرفة على المجال $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على هذا المجال .

② $\forall x \in [a,b] \Longrightarrow g(x) \in [a,b]$

③ $\forall x \in [a,b] \Longrightarrow |g'(x)| < k < 1$ حيث k عدد صحيح موجب

عندئذ يكون :

1. $\forall x_0 \in [a,b]$ فيمكن حساب القيم $x_1, x_2, \ldots, x_n$

2. الدالة $g(x)$ نقطة ثابتة α واحدة في المجال $[a,b]$ بحيث $\alpha = g(\alpha)$

3. $\forall x_0 \in [a,b]$ فإن المتتالية $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ تكون متقاربة من الحل الحقيقي .

ملاحظة : كل دالة قابلة للاشتقاق هي دالة معرفة ومستمرة ، لكن العكس ليس صحيحاً بالحالة

SUBJECT:

العامة.

مثال: دالة القيمة المطلقة معرفة ومستمرة لكنها ليست قابلة للاشتقاق.

- لكي يتقارب حل المعادلة بطريقة النقطة الثابتة يجب أن تتحقق الشروط الثلاث الأولى في المبرهنة السابقة؛ فإذا اختل أحد هذه الشروط نقول أن متتالية الحد تكون متباعدة؛ وهنا يجب أن نختار $g(x)$ بشكل مغاير.

- نبين بيانياً متى يكون الحل متقارباً ومتى يكون متباعداً؟

تقارب من جهة واحدة

تقارب من جهتين

تباعد من جهة واحدة

تباعد من جهتين

ملاحظة: يمكننا استخدام الطرائق السابقة من أجل إيجاد جذور تقريبية للأعداد من أية مرتبة كانت.

SUBJECT:

مثال ٢: أوجد الجذر التقريبي من المرتبة الرابعة للعدد 25 مع العلم أن $x_0 = 3$
$\varepsilon = 0{,}0001$

الحل: نفرض أن $x = \sqrt[4]{25}$

$\leftarrow x^4 = 25 \leftarrow x^4 - 25 = 0$

وهي معادلة جبرية

$f(x) = x^4 - 25 = 0$
$f'(x) = 4x^3$

اعتماداً على الدستور:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{81}{108} = 2{,}25$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2{,}25 - \frac{0{,}6289}{45{,}5625} = 2{,}23619$$

نتابع حتى نجد جذرين x_{j+1}، x_j بحيث أن $|x_{j+1} - x_j| < \varepsilon$، فيكون x_{j+1} هو الجذر التقريبي المطلوب.
$x_{j+1} \cong x^*$

حل جملة معادلات جبرية:

طريقة نيوتن: لتكن لدينا جملة المعادلات الجبرية التالية لمتحولات من درجات مختلفة:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{array}\right\} \ldots [1]$$

نكتب هذه الجملة بشكل مختصر:

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، $f(x) = 0$ ..... [2]

حل جملة المعادلات السابقة تعتمد على إيجاد حل معادلة جبرية واحدة من خلال دستور

نيوتن الآتي:

$$x^{(p+1)} = x^{p} - w^{-1}(x^{p}) \cdot f(x^{p}) \quad \boxed{3}$$

حيث $w^{-1}(x^{(p)})$ هو مقلوب المصفوفة w في النقطة $x^{(p)}$ والمصفوفة w هي مصفوفة المشتقات الجزئية (جاكوبيان) $w = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right)$

أي أن:
$$w^{-1}(x^{p}) = \frac{1}{|w(x^{p})|} \cdot \tilde{w}^{T}(x^{p})$$
منقول مصفوفة المتممات الجبرية

$$w = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

مثال: أوجد بطريقة نيوتن حل مجموعة المعادلات التالية:

$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

$2x^2 + y^2 - 4z = 0$

$3x^2 - 4y + z^2 = 0$

حيث $\varepsilon = 0{,}0005$ والحل الابتدائي:

$$X^{0} = (x_0, y_0, z_0) = (0{,}5\ ,\ 0{,}5\ ,\ 0{,}5)$$

الحل:

$$f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 - 1 \\ 2(0{,}25) + 0{,}25 - 4(0{,}5) \\ 3(0{,}25) - 4(0{,}5) + 0{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}25 \\ -1{,}25 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ومصفوفة المشتقات الجزئية:

$$W(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4 \\ 6x & -4 & 2z \end{pmatrix}$$

وعند الحل الابتدائي:

$$W(X^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2(0.5) & 2(0.5) & 2(0.5) \\ 4(0.5) & 2(0.5) & -4 \\ 6(0.5) & -4 & 2(0.5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |W(X^{(0)})| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -40 \neq 0$$

فالمصفوفة قابلة للقلب

$$W^{-1}(X^{(0)}) = -\frac{1}{40}\begin{pmatrix} -15 & -5 & -5 \\ -14 & -2 & 6 \\ -11 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 1/8 \\ 7/20 & +1/20 & -3/20 \\ 11/40 & -7/40 & +1/40 \end{pmatrix}$$

بالتعويض في [3] نحصل على التقريب الأول:

$$X^{(1)} = X^{(0)} - W^{-1}(X^{(0)}) \cdot f(X^{(0)})$$

$$= \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 & 1/8 \\ 7/20 & 1/20 & -3/20 \\ 11/40 & -7/40 & 1/40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1 \end{pmatrix}$$

SUBJECT:

$$\longrightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,875 \\ 0,5 \\ 0,375 \end{pmatrix}$$

وبالتعويض مجدداً في [3] من أجل $x^{(1)}$ فنحصل على التقريب الثاني :

$$x^{(2)} = x^{(1)} - W^{-1}(X^{(1)}).\, f(X^{(1)})$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,78981 \\ 0,49662 \\ 0.36993 \end{pmatrix}$$

وبالطريقة نفسها نجد التقريب الثالث

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,7852 \\ 0,4966 \\ 0,3699 \end{pmatrix}$$

ونلاحظ أن :

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = 0,00461 < \varepsilon$$

$$|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = 0,000021 < \varepsilon$$

$$|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = 0.00003 < \varepsilon$$

إذاً الحل المطلوب هو $x^{(3)}$.